解析的ザリスキー構造とChowの定理 (モデル理論の手法による無限構造の構成法)

板井, 昌典

数理解析研究所講究録
第 1602 巻 2008 年 64-69

解析的ザリスキー構造とChowの定理
Analytic Zariski structures and Chow's Theorem

板井　昌典 (ITAI Masanori)
東海大学　理学部　情報数理学科
Dept. of Math. Sciences, Tokai University

概 要

Zilber introduced the notion of analytic Zariski structure as an analytic version of Zariski structure. Peatfield and Zilber showed that Hrushovski type generic structures can be made as analytic Zariski stuructures. In this note I point out that a generalized Chow theorem hold in those structures.

はじめに

解析的ザリスキー構造についての基本的な論文である [PZ] において，Peatfield と Zilber は，Hrushovski generic 構造を解析的ザリスキー構造として捉える方法について論じている．そこでは，Chow の定理に対応する定理が証明されている．

本稿では，Chow の定理が成り立つ仕組みを解説し，[PZ] で論じられている Hrushovski generic 構造以外の構造においても同様の定理が成立することを指摘する．

1　解析的ザリスキー幾何の公理系

すでに何度か紹介したので，解析的ザリスキー幾何の公理系 [PZ] については，拙稿 [I1] を参照していただきたい．

構造 $\mathbf{M} = (M, \cdots)$ と $\mathbf{P} = (P, \cdots)$ が解析的ザリスキー幾何の公理 A-C を満たすとき，構造 $\mathbf{M}$ を**コンパクト化可能な解析的ザリスキー幾何**と呼ぶ．あるいは $\mathbf{P}$ を**コンパクト解析的ザリスキー幾何**と呼ぶ．ここで M と P に関しては，互いに一方から他方は定義可能であるとする．したがって定義可能性の観点からは，どちらか一方だけに着目しても不都合は特に生じない．

$\mathcal{C}$ を $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} P^n$ の定義可能集合の集まりとし，$\mathcal{C}$ に属する集合を $\mathcal{C}$-閉集合と呼ぶ．

2　Hrushovskiタイプの構成法

これは，Peatfield と Zilber の共著論文 [PZ] において詳述されている例である．

Hrushovski が 強極小集合に関する Zilber 予想や，可算範疇性に関する Lachran 予想に対する反例を構成するときに用いた手法を応用している．

Hrushovski 同様，唯一の 3 項関係記号 R を持つ言語 $\mathcal{L}$ を考える．この R は実は，一般的な「解析的関係」の高度な抽象化になっているようだが，すくなくとも論文の文面だけからでは明らかではない．また，体上で考察して訳でもないので，目標とする「複素解析的構造」のモデル理論にはまだまだ開きがあるが，とにかく第一歩である．

ここでは，述語記号は 3 項関係 R が 1 つだけであるが，複数個の場合も考えることができる．一般化された場合の generic 構造の作り方，位相の定義も同様に行う．

定義 1 (基本的な概念)　1. X を有限な $\mathcal{L}$-構造とする．

- $r(X) = |\{(x_1, x_2.x_3) \in X^3 : x_1 \neq x_2, x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3, R(x_1, x_2, x_3\}|$
- $\delta(X) = |X| - r(X)$ を X の前次元という．

2. $\mathcal{K} = \{A : A$ は $\mathcal{L}$-構造で，任意の有限な部分 $\mathcal{L}$-構造 A' に対して$\delta(A') \geq 0\}$
3. $d_B(A) = \min\{\delta(A \cup X) : X \subseteq_{fin} B\}$ を，A の B での相対次元という．
4. $\delta(A) = d_B(A)$ のとき，A は B で強い関係にあるといい，$A \leq B$ と書く．この概念を用いると，$\mathcal{L}$-構造 M に対して，$M \in \mathcal{K}$ と $\emptyset \leq M$ が同値になる．
5. $\mathcal{K}_0 = \{A : A$ は有限 L-構造, $\emptyset \leq A\}/\sim$

最後に定義した $\mathcal{K}_0$ を用いて，Hrushovski-Fraissé タイプの構成を行い，次のような構造 M を得る．

1. M は可算集合．
2. $\mathcal{K}_0 = \{A : A \leq M\}/\sim$
3. $A \leq M$ かつ $f : A \to B$ が強い埋め込みならば，$B' \leq M$ が存在して，$A \subseteq B'$ であり，同型写像 $g : B \to B'$ が存在して $gh = id_a$ が成り立つ．
4. A, B を有限な L-構造で $A \leq M$ かつ $B \leq M$ とする．このとき A から B への同型写像は，M の自己同型に拡張できる．
5. M は同型を除いて一意的である．

M に位相を定義し，その定義に関して解析的ザリスキー構造になっていることを示さなければならない．

位相を定義する基本概念は，「単純閉集合 (simple closed)」,「特殊閉集合 (special closed)」,「基本閉集合 (basic closed)」である．これらについては拙稿 [I1] を参照していただきたい．

定義 2 (言語) 特殊閉集合ごとに対応する述語記号を導入し，言語 $\mathcal{L}$ に添加して出来る言語を $\mathcal{L}^*$ とおく．

定義 3 $A \subseteq M$ に対して，

$$c \in \mathrm{cl}_M(A) \Longleftrightarrow d_M(c/A) \leq 0$$

によって，A の閉包 $\mathrm{cl}_M(A)$ を定義する．

定義 4 (次元) A をパラメーターの集合とし，A 上定義可能な関係，あるいはタイプで定義される関係 S に対して

$$\dim(S) = \max\{d(\bar{s}/A) \mid \bar{s} \in S(M^n)\}$$

と定義する．この次元を使うと，任意の閉集合に対して次元が定義される．

このように次元を定義すると，自然につぎの補題を得る．

補題 5 S を，有限集合 A 上定義された関係とする．このとき

$$\dim(S) = 0 \Longleftrightarrow S(M^n) \subseteq (\mathrm{cl}_M(A))^n$$

2.1 Hrushovski 構造の 1 点コンパクト化

Hrushovski generic 構造を 1 点コンパクト化してコンパクト解析的ザリスキー幾何を定義するが，その方法は以下の通りである．

M を Hrushovski generic 構造とし，$\overline{M} = M \cup \{\infty\}$ とおく．U を M における特別閉集合とすると，任意の $\bar{m} \in \overline{M}^n$ に対して，すくなくとも 1 つの $\bar{m}$ の座標が，∞ ならば $\overline{M} \models U(\bar{m})$ と定義することによって，M における位相を，$\overline{M}$ に自然に拡張することができる．このような拡張を，Hrushovski generic 構造の 1 点コンパクト化と呼ぶ．

$A \subseteq_{fin} \overline{M}$ に対して

$$\delta(A)_\infty = \delta(A - \{\infty\})$$

と定義する．しかし，混同の恐れのないときは，δ_∞ を単に δ と書く．$d_\infty(A)$ も同様に定義し，混同の恐れのないときは，$d_\infty(A)$ を単に $d(A)$ と書く．

定義 6 1. $\mathcal{L}^*_\infty = \mathcal{L}^* \cup \{\infty\}$ とおく．$\mathcal{L}^\infty$ に関して，否定を使わずに定義された関係を $\mathcal{L}^*$-閉集合とよぶ．

2. $\mathcal{L}^*$-閉集合の任意個の共通部分として定義される $\overline{M}^n$ の部分集合を，閉集合とすることによって $\overline{M}^n$ に位相を定義する．

2.1.1 位相の定義

定義 2 で得られた言語 $\mathcal{L}^*$ に ∞ を添加して得られる言語を $\mathcal{L}^*_\infty$ とする．言語 $\mathcal{L}^*_\infty$ で，否定を用いずに定義される集合を $\mathcal{L}^*$-閉集合とよび，$\mathcal{L}^*$-閉集合の任意個の共通部分を $\mathbb{P}^n$ の閉集合とする位相を導入する．

この位相を詳しく分析することによって，

命題 7 (Prop. 4.2.13 [PZ]) 任意の $\mathcal{L}^*$-閉集合は，否定だけでなく，量化記号も用いずに定義される．

ことが証明されるので，この位相により射影が閉写像になっていることがわかる．解析的ザリスキー構造であるためには，射影が開写像であることも示さなければならない．そのために，specialization を考え，その spacialization を用いて π-位相というものを定義する．この π-位相を考えると，射影が開写像であることは容易に証明できる．その後で，π-位相と $\mathcal{L}^*$-閉集合による位相が同じであることを証明する．

2.1.2 解析集合の定義

Hrushovski の generic 構造 M に位相と次元が入っていることが確認できたので，この 2 つの概念を用いて M における解析集合を定義する．

定義 8 $U \subseteq \overline{M}$ を開集合とする．

1. $X \subseteq U$ が，U で相対的に閉で ($X \subseteq_{\mathcal{L}-closed} U$)，$X_1 \subseteq_{closed} U$, $X_1 \subsetneq X$, かつ $\dim(X_1) = \dim(X)$ となる集合 X_1 が存在しないとき，X は U において強既約であるという．
2. $S \subseteq \overline{M}^n$ を閉集合, $u \in \overline{M}^n$ とする．開集合 $V_u \ni u$ が存在して，$V_u \cap S$ が，V_u において強既約な有限個の閉集合の和になっているとき，閉集合 S は u で解析的であるという．
3. 各点 $u \in U$ に対して，2 で定義したような開近傍 V_u が存在するとき，閉集合 $S \cap U$ は U で解析的であるという，$S \cap U \subseteq_{an} U$ と書く．
4. $S \subseteq_{an} U$ とする．$S_1, S_2 \subsetneq S$，$S_1, S_2 \subseteq_{an} U$ かつ $S = S_1 \cup S_2$ となるような S_1, S_2 が存在しないとき，S は既約であるという．

3 Chow の定理

射影空間において解析的集合は代数的であるということを主張する，有名な Chow の定理があるが，その定理に対応している定理が解析的ザリスキー幾何で成り立っている．この節では，まず本来の Chow の定理の証明を概観する．

3.1 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ における Chow の定理

[Mu], [O1], [N1] を参考にして，Chow の定理の証明と解析的ザリスキー構造の諸公理との関係について考える．

定理 9 (Remmert-Stein の接続定理) $U \subseteq_{op} \mathbb{C}^n$，$Y \subseteq_{an} U$ とする．$X \subseteq U - Y$ とし，X が $U - Y$ の既約な閉解析集合であり

$$\dim X > \dim Y$$

ならば，X の U における閉包は解析集合である．

この定理を用いた Chow の定理の証明は以下の通りである．

X を $\mathbb{P}^n$ の閉解析集合とする．$\mathbb{P}^n$ のコンパクト性から X は有限個の既約成分（補題 11 (2) 参照）しかないから，X が既約だとしてよい．射影空間における標準的写像

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{P}^n \\ \psi & & \psi \\ x & \mapsto & \mathbb{C}\cdot x \text{（原点と } x \text{ を通る直線）} \end{array}$$

を考え，X の逆像を X^* と書く．$U = \mathbb{C}^{n+1}$，$Y = \{\mathbf{0}\}$ と考える．1 点は，閉解析集合であり次元は 0 だから，Remmert-Stein の定理から $\mathbb{C}^{n+1}$ における X^* の閉包 $\overline{X^*}$ は，$\mathbb{C}^{n+1}$ の解析集合である．定義イデアル $I_{\overline{X^*}}$ の有限個の生成元を $f_1, \cdots, f_m$ とする．

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{jk}(z) \quad p_{jk} \text{ は } k \text{ の同次多項式} \tag{1}$$

とおく．$z_0 \in X^*$ とすると，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $f_j(\lambda z_0) = 0$ だから

$$f_j(\lambda z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p_{jk}(z_0) \tag{2}$$

に注意して，各自然数 k に対して，$p_{jk}(z_0) = 0$ である．したがって解析集合 $\overline{X^*}$ は，無限個の同次多項式 p_{jk} の共通零点である．

ところで，多項式環 $\mathbb{C}[z]$ はネーター環だから，

$$\{p_{jk} \mid 1 \leq j \leq m,\ k = 0, 1, \cdots\}$$

で生成されるイデアルは有限個の生成元をもつ．よって X はこれら生成元の共通零点になるので，代数的集合である．■

Chow の定理の定理は射影空間の性質を最大限利用している．特に等式 (1)，(2) の性質が重要である．またベキ級数環のネーター性を利用して定義イデアル $I_{\overline{X^*}}$ から有限個の生成元を取り出しているが，ベキ級数のネーター性の証明には，Weierstrass の予備定理が必要である．

3.2 コンパクト解析的ザリスキー幾何における大域的解析性について

前節で述べた Chow の定理は「コンパクト空間においては大域的解析集合は代数的である」という性質であるが，これに対応して，解析的ザリスキー幾何ではつぎの定理が一般的に成り立つ．

定理 10 ([PZ], Theorem 2.2.1) コンパクト解析的ザリスキー幾何における大域的解析集合からなる集合族は，(代数的) ザリスキー幾何になる．

が挙げられる．証明の要点は次の 3 点である．$\mathbf{P}$ をコンパクト解析的ザリスキー幾何とする．

補題 11 (1) $a \in S_{an} \subseteq U_{op} \subseteq \mathbf{P}^n$ とし S_a を点 a の解析的既約成分の和集合とする．このとき S_a を構成する解析的既約成分は一意的に定まる．

(2) $\mathbf{P}^n$ の大域的解析集合は有限個の既約成分しか持たない．

(3) 大域的解析集合の射影は大域的解析集合である．

証明：(1) この命題の証明は拙稿 [I1] でも取り上げたが，より簡潔な証明があるのでここに紹介する．

いま S_a, C_a をそれぞれ点 a における解析的既約成分の有限個の和集合とし，

$$S = S_a \cup S'_a = C_a \cup C'_a$$

となっているとする．$S_a = C_a$ を示す．$S_a = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ とし，各 S_i は a の解析的既約成分で $a \in S_i$ とする．まず $S_i \subseteq C_a$ を示す．

$$S_i = (S_i \cap C_a) \cup (S_i \cap C'_a)$$

である．ここで $S_i \cap C_a$ と $S_i \cap C'_a$ はそれぞれ解析集合だから，S_i の解析的既約性より $S_i = S_i \cap C_a$ または $S_i = S_i \cap C'_a$ である．もし $S_i = S_i \cap C'_a$ ならば $S_i \subseteq C'_a$ となるが，これは $a \in S_a$ かつ $a \notin C'_a$ であることに反する．よって $S_i = S_i \cap C_a$ であるので $S_i \subseteq C_a$ である．したがって $S_a \subseteq C_a$ である．同様の議論を C_a を構成する a の解析的既約成分に対して行えば $C_a \subseteq S_a$ が得られる．よって $S_a = C_a$ である．

つぎに S_a, C_a を構成する，点 a の解析的既約成分は順序を除けば同一であること，すなわち，

$$S_a = S_1 \cup \cdots \cup S_k, \quad C_a = C_1 \cup \cdots \cup C_l$$

とすると，$k = l$ かつ任意の S_i に対して，ある j が存在して $S_i = C_j$ となることを示す．

$S_1 \subseteq C_a$ だから

$$S_1 = (S_1 \cap C_1) \cup \cdots \cup (S_1 \cap C_l)$$

であることに注意する．ここで各 $S_1 \cap C_j$ は U の解析的集合だから S_1 が既約な解析的集合であることから $S_1 = S_1 \cap C_j$ となる j が存在する．$j = 1$ として一般性を失わない．よって $S_1 \subseteq C_1$ とする．ここで

$$C_1 - S_1 = C_1 \cap (U - S_1)$$

に注意する．$U \subseteq_{op} \mathbf{P}^n$ かつ $S_1 \subseteq_{cl} U$ だから $U - S_1 \subseteq_{op} \mathbf{P}^n$ に注意する．公理 B.4 より $(C_1 - S_1) \subseteq_{an} U - S_1$ であり，公理 C.4 より $C_1 - S_1 \neq \emptyset$ ならば $\dim(C_1 - S_1) = \dim C_1$ である．

他方，

$$C_1 - S_1 \subseteq C_1 \cap (S_2 \cup \cdots \cup S_k) \subsetneq C_1$$

であり，$C_1 \cap (S_2 \cup \cdots \cup S_k) \subseteq_{an} U$ に注意すると C_1 の既約性から $C_1 - S_1 \neq \emptyset$ なら $\dim(C_1 - S_1) < \dim C_1$ となって矛盾する．よって $C_1 = S_1$ でなければならない．

(2) いま $S \subseteq \mathbf{P}^n$ を大域的解析集合とし，無限個の解析的既約成分によって構成されているとする．集合族

$$\mathcal{S} = \{S'_a \mid a \in S\}$$

を考える．各 S'_a は，S を構成する無限個の解析的既約成分のうち，有限個を除くすべての既約成分を含んでいる．したがって $a \neq b$ ならば $S'_a \cap S'_b \neq \emptyset$ であるから，集合族 $\mathcal{S}$ は有限交叉性をもつ．したがってコンパクト性から $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$ となってしまって，各 S'_a に対して $a \notin S'_a$ であることに矛盾する．よって任意の大域的解析集合は，有限個の解析的既約成分によって構成される．

(3) S を大域的解析集合とする．射影 pr は，S 上固有になるから公理 B5 により，$pr(S)$ は大域的解析集合となる． ■

系 12 コンパクト解析的ザリスキー構造において，大域的解析集合だけを集めて得られる集合族は，ザリスキー幾何になる．

証明： $\mathbf{P}$ をコンパクト解析的ザリスキー構造とする．大域的解析集合の無限降下列が存在しないことがポイントである． ■

3.3 大域的解析性の意味づけ

Peatfield と Zilber の論文 [PZ] で構成された，Hrushovski generic 構造を $\mathbb{P}^n$ とする．そこでの大域的解析集合は，等式で定義された集合に限るということが成り立っている．

定理 13 (解析的ザリスキー幾何における Chow の定理，Thm 5.2.1 [PZ]) S を $\mathbb{P}^n$ の閉集合とする．このとき，

$$S \text{ は } \mathbb{P}^n \text{ の解析的集合} \iff S \text{ は等式のみで定義される．}$$

が成り立つ．

証明： 等式のみで定義された閉集合は，既約であり強既約でもある．さらに解析的にも既約であるので解析集合になっている．

$S \subseteq_{an} \mathbb{P}^n$ とする．S が閉集合であるから，S の定義には，述語記号 R と等号が，肯定的に現れる．実は，R は現れないことを示せばよい．S の解析的既約成分を考えることにより，S 自身既約だと考えてよい．S に $R(x,y,z)$ が現れているとすると，1 点コンパクト化の定義により

$$(\{\infty\} \times M \times M) \cup (M \times \{\infty\} \times M) \cup (M \times M \times \{\infty\}) \subseteq S$$

が成り立ってしまうので，S の既約性が壊れてしまう．局所的な解析集合，すなわちある開集合の部分集合として解析的な場合は，開集合の部分に等号の否定を含むことができるのでこのようなことは起こらない．したがって大域的解析集合には，述語記号 R は現れない． ■

3.4 δ-関数と大域的解析性

Hrushovski generic 構造の一般的構成を簡単に振り返ると，次のようになる．

1. 有限個の述語記号からなる言語 $\mathcal{L}$ を決める．
2. 言語 $\mathcal{L}$ に関する有限構造に対して δ-関数を導入する．δ-関数に関しては，Schanuel 性が成り立つようにしておく．
3. δ-関数を用いて，言語 $\mathcal{L}$ の有限構造のクラス $\mathcal{K}$ を 1 つ決める．
4. クラス $\mathcal{K}$ に属する有限構造を貼り合わせて generic 構造 M を構成する．
5. Hrushovski generic 構造 M を 1 点コンパクト化した構造 $\overline{M}$ に対して，Peatfiled と Zilber の方法と同様にして位相を定義し，コンパクト解析的ザリスキー幾何 $\mathbb{P}$ と考える．

さて $\mathbb{P}^n$ の定義可能な部分集合に対しては，δ-関数から定義される d-関数が定義されるが，この d-関数を用いて，次元関数 dim が，やはり Peatfiled と Zilber の方法と同様にして定義される．この次元関数 dim を用いて，強既約性，解析的既約性が定義され，最終的に解析的既約成分，解析集合が定義される．

このような状況では，つぎの定理が一般的な Chow の定理と考えられる．

定理 14 (一般的 Chow の定理) S を $\mathbb{P}^n$ の閉集合とする．このとき，

$$S \text{ は } \mathbb{P}^n \text{ の解析的集合} \iff S \text{ は } \delta\text{-関数に関与しない述語および等式のみで定義される．}$$

が成り立つ．

参考文献

[Ho] Wilfrid Hodges, Model Theory, Cambridge UP, 1993

[HZ] Ehud Hrushovski, Boris Zilber, Zariski geometries, J of the AMS, 1996

[I1] 板井　昌典，解析的ザリスキー構造と Hrushovski generic 構造，数理解析研究所講究録 1574，39 − 49，2007 年 11 月

[It] 板井　昌典，『幾何的モデル理論入門』，日本評論社，2002

[Ma] David Marker, Model Theory: An Introduction, GTM 217, Springer, 2002

[Mu] David Mumford, Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties, Springer, 1975

[O1] 大沢　健夫，『複素解析幾何と $\bar{\partial}$ 方程式』，培風館，2006

[N1] 西野　利雄，『多変数函数論』，東京大学出版会，1996

[P1] Nick Peatfield, An analytic Zariski structure over a field, Archive for Mathematical Logic, 45(6), pp. 739-768 (2006)

[P2] Nick Peatfield, A complex-like Analytic Zariski structures on models of the theory of a generic function with derivatives

[PZ] Nick Peatfield, Boris Zilber, Analytic Zariski structures and the Hrushovski construction, Annals of Pure and Applied Logic 132(2005) 127-180

[Z1] Boris Zilber, Non-commutative geometry and Zariski geometry

[Z2] Boris Zilber, A class of quantum Zariski geometries

[Z3] Boris Zilber, Zariski Geometries Geometry from the logician's point of view, Oct. 30, 2007